

基于图像梯度信息的插值方法

谢美华 王正明

(国防科技大学数学与系统科学系,长沙 410073)

摘要 图像插值是图像处理中的一个基本问题,为了获得更合理的图像插值权函数,从1维函数中插值的有关思想出发,通过梯度信息在图像插值中的应用研究,构造了一种基于图像梯度信息的加权插值方法。该方法利用图像为分片连续的光滑函数的先验信息,通过建立一个与各点梯度值成反比的权函数来完成对图像的插值,同时对涉及的有关参数选择问题进行了讨论,给出了一种合理的参数选取方法。仿真计算表明,该方法对一般图像均具有较好的插值效果,尤其适用于对比度较强,且边缘简单的图像,插值后的图像边缘更清晰。

关键词 图像插值 梯度 权系数

中图分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2005)07-0856-06

Image Interpolation Based on Gradient

XIE Mei-hua, WANG Zheng-ming

(Department of Mathematica, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract Image interpolation is a basic problem of image processing, in order to get a more reasonable weight function, the paper studies the application of gradients in one-dimensional signal interpolation, and generalizes it to the interpolation of image, then obtains a method for image interpolation based on gradients. In linear interpolation model, the weighted function is only dependent on the distance of the pixels, but not on the gradient, which often leads to the blurring of the image. Since image is a piecewise continual function, the gray value of an unknown pixel is closer to the pixel with smaller gradient than the pixel with bigger gradient, so a decreased weighted function of gradient is constructed in this method to interpolate the unknown pixels. It also discusses the selection of the related parameter in the model, and obtains a reasonable parameter based on the distribution of the gradient. The algorithm is tested on two images, all results show that the new method has higher peak signal to noise ratio and better intensity of image than known methods, and that it suits to simple image especially.

Keywords image interpolation, gradient, weight function

1 引言

图像分辨率的大小直接影响着图像的应用效果,而在实际成像过程中,由于受成像设备等硬件性能的限制,其所获得的图像往往达不到应用对分辨率的要求,若从硬件上改进,则需付出较昂贵的代价,此时就需要通过插值来实现图像的放大显示,以

提高图像的分辨率。

图像插值一般是指基于模型的框架下,在给定的空间范围内,从低分辨图像生成高分辨率图像的过程,此过程必须满足插值条件,即高分辨图像在原始低分辨图像采样点处的取值与低分辨图像的取值相同。众所周知,插值过程中起决定作用的是联系低分辨图像与高分辨图像的插值模型,其中最常用的插值函数有最近邻法、双线性插值法、双三次插值

基金项目:全国优秀博士论文基金项目(200140);国家自然科学基金项目(60272013)

收稿日期:2003-05-15;改回日期:2004-12-09

第一作者简介:谢美华(1976~),女。1998年,2002年先后获国防科技大学应用数学学士和硕士学位,现为国防科技大学系统工程专业博士研究生。主要研究方向为图像处理的偏微分方程方法、试验数据处理。E-mail: xmhjh@163.com

法、Sinc 函数插值法等,但这些方法常常会导致边缘的模糊。为此,目前已有许多学者致力于研究保边缘的插值方法,现已研究出了基于边缘定向的插值方法、基于多核的插值方法、基于正交变换的插值方法以及基于统计的插值方法等多种方法,它们虽能在一定程度上减少高频信息的损失,但是算法的设计通常很复杂。

本文借鉴偏微分方程去噪的有关模型,将各点的梯度信息应用到图像插值中,从而建立了基于图像梯度信息的插值模型,计算结果表明,该方法具有较好的应用效果,且算法简单可行。

2 传统的插值方法

单幅图像插值问题可简单描述如下:

$$f(t_1, t_2) \Big|_{t_1=n_1T_1, t_2=n_2T_2}, \text{插值后的图像的灰度值为}$$

$$\hat{f}(t_1, t_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) K\left(\frac{t_1}{T_1} - n_1, \frac{t_2}{T_2} - n_2\right) \quad (1)$$

其中, $K(t_1, t_2)$ 是连续插值核函数, T_1 和 T_2 分别为沿 x, y 方向的采样步长。

常用的核函数插值法有最近邻法、双线性插值法、双三次插值法、Sinc 函数插值法等^[1,2]。另外,有些学者从参数化样条表示的角度出发,在给定函数拟合的误差阶下,通过最小化拟合误差常数得到了一些最优的插值基函数,其基本模型如下:如将式(1)改为参数化函数拟合模型

$$f(t) = \sum_n C_n \varphi\left(\frac{t}{T} - n\right) \quad (2)$$

一般的,参数 $C_n \neq x_n$, 其中 f_T 指的是 1 维情况下的原图像的灰度值, T 为采样步长。其基函数 $\varphi(t)$ 常常选择的是 B 样条函数^[3], 这是由 B 样条函数本身具有最小支撑性等许多优点所决定的。

由于式(1)的基函数和式(2)的 L 阶 B 样条函数 $B_{L-1}(t)$ 及最优插值基函数 $\varphi_0(t)$ 都是线性插值函数,其对高频信息具有抑制和平滑效应,因此不可避免地会丢失一些重要的高频信息和边缘纹理特征,使插值后的图像在视觉效果上产生模糊。目前,边缘和纹理特征的保护是图像插值领域中急需解决的一个难题,对这个问题至今还没有找到一种十分成功的解决方案,但是,如下 4 个途径可在一定程度上减轻高频信息的损失和改善图像的平滑效果:

(1) 基于边缘方向的插值方法^[4]

沿边缘方向的插值是基于如下事实:由于在边缘区域和非边缘区域的交接部分存在一个梯度场,若从边缘区域穿到非边缘区域中去,则其灰度值会出现显著的落差和振荡,从而,在插值过程中,若沿高频方向(穿越边缘)插值,则会在一定程度上平滑掉这些边缘和纹理特征,而沿低频方向(沿边缘方向)插值就不会平滑掉这些高频信息。因此,沿边缘方向插值比穿越边缘方向的插值效果要好。

(2) 基于多核的方法^[5]

基于多核的插值方法就是在分析图像的局部统计特性的基础上,确定用于研究区域内插值的合适基函数,也就是对图像进行分片插值,且图像中不同的区域采用不同的插值基函数,但同一区域中的像素点的灰度值需具有相同或相近的属性。

(3) 基于正交变换的方法^[6,7]

用于图像插值的正交变换主要有离散傅里叶变换(DFT)、离散余弦变换(DCT)、离散小波变换(DWT)等,其中基于 DFT 的插值算法的主要思想就是将时域上的插值模型转换到频域上进行处理,且其插值基函数相应地改为三角函数 $\varphi(t) = e^{-j2\pi t}$, 而基于 DWT 的插值算法,则主要是由于 DWT 的高频子带代表了图像中的边缘纹理等高频信息,为了较好地保留边缘和纹理,有些文献提出,在利用逆小波变换对图像进行插值前,先对 DWT 的高频子带进行一定的增益,以保证不会丢失太多的边缘和纹理信息。

(4) 基于统计的方法^[8]

基于统计的方法实际上是把图像插值问题转化为一个带约束的泛函极小化问题,这相当于在给定原始信号的概率密度函数和观测数据后,将图像插值问题转化为关于原始信号的最佳估计问题,其估计结果与损失函数的选取有关,最常用的估计就是极大似然估计和 Bayes 估计。

上述各种插值方法虽在一定程度上实现了图像的放大和分辨率的提高,但实际计算却表明,这些插值方法在处理边缘和纹理信息时,仍不能很好地解决边缘和纹理信息的保留问题,且算法较复杂。

3 基于梯度信息的插值技术

3.1 原理

从离散的角度出发,图像插值问题可以简单地

理解为利用周围邻域的已知点的加权平均来对未知点的灰度值进行估计。在 1 维情况下考虑此问题,不难发现有以下规律存在:

引理 1 设 $f(x)$ 为二阶连续可微函数, x_1, x_2 为其定义域内距离足够近的两点, 设 $f(x)$ 在 x_1, x_2 处的导数分别为 $f'(x_1), f'(x_2)$, 且满足 $|f'(x_2)| - |f'(x_1)| > a$, a 为一个很小的正数, 则该函数在 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 处的取值满足下式:

$$\left| f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1) \right| < \left| f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_2) \right| \quad (3)$$

证明 根据泰勒展开式,

$$\left| f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1) \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{2} f'(x_1) \right| + o\left(\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2\right)$$

$$\left| f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_2) \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{2} f'(x_2) \right| + o\left(\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2\right)$$

由于 $|f'(x_2)| - |f'(x_1)| > a$, 显然在 $|x_1 - x_2| < \frac{a}{K}$ 时, 有式(3)成立, 其中 K 由泰勒展开式的余项决定。

引理 1 说明, 在对二阶连续可微函数进行插值时, 待插值点的值与其左右两点的值相比更接近于较平坦的点, 也就是说, 在利用其左右两点进行插值时, 导数越小的点对应的权值越大。将这种思想推广到 2 维曲面图像插值中, 可得如下定理:

定理 1 设 $f(x, y)$ 为分片二阶连续可微函数, 且不存在孤立的边缘点, 即 $f(x, y)$ 总是沿某 θ 方向连续可微, 此 θ 方向即为该连续函数的边缘方向, 则在分片连续区域的内部, 待插值点 (x_0, y_0) 处的灰度值 $f(x_0, y_0)$ 满足:

$$f(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i, y_i)$$

其中, $f(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ 为 (x_0, y_0) 点周围邻域内的点的函数值, 权系数 w_i 与 (x_i, y_i) 点处梯度值成反比, 而在边缘上的待插值点 (x_0, y_0) 处的函数值 $f(x_0, y_0)$ 应满足:

$$f(x_0, y_0) = \sum_{j=1}^M w_j f(x_j, y_j)$$

其中, $f(x_j, y_j), j = 1, \dots, M$ 为点 (x_0, y_0) 处的沿 θ 方向相邻点的函数值, 其权系数 w_j 与点 (x_j, y_j) 处沿 θ 方向的梯度值成反比, 由于对边缘点插值时利用的周围邻域的点的个数小于对光滑点插值时所利用的点的个数, 所以 $M < N$ 。

证明 由引理 1 推广得。

一个实际观测图像是定理 1 中的连续函数的离

散化, 即 $f(i, j) = f(x, y) |_{x=iT_1, y=jT_2}$, 其中 T_1 和 T_2 分别为 $f(x, y)$ 沿 x, y 方向的采样步长, 下面 (i, j) 均表示离散采样后图像中的某一点。因此图像的插值问题可理解为待插值的第 (i, j) 点的值由其邻域内的低分辨率图像中点的灰度值的加权平均确定, 其中对于权的选取, 双线性、双三次等插值方法分别由其各自的核函数决定, 但由于这种确定方法是基于图像在局部范围内可由某组基函数描述的假设而得到, 这种假设不一定能真正反映图像本身, 因此得到的图像往往会在某些不符合这一假设处产生不好的效果。下面, 在决定该核函数时, 可采用上述以邻域内各点处的梯度来决定权值的思想。

一般而言, 可将图像的插值问题按图 1 描述, 其中带阴影的方格为已知的低分辨率图像的像素点, 不带阴影的方格为待插值的高分辨率图像的像素点。其所在行或列中存在已知像素点的点, 可由与其相距最近的两点的加权平均获得, 若其所在行或列中均不存在已知像素点的点, 则由与其相距最近的 4 个点的加权平均获得。由于图像沿边缘方向的导数较小, 而垂直边缘的方向导数较大, 因此认为, 待插值点的灰度值应接近于其周围各点中导数值较小的点, 这样在确定权系数时, 就可以各点的导数为准, 权系数与导数值成反比, 即导数值越大, 权值越小; 导数值越小, 权值越大。

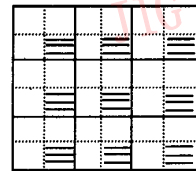


图 1 二倍插值示意图

Fig. 1 The sketch map of double interpolation

3.2 模型

根据上述插值原理, 可得到如下插值模型: 现以行列方向分别进行二倍插值为例来进行说明, 设低分辨率图像 u 为由高分辨图像 v 经过隔行隔列的方法抽取得到, 则在低分辨率图像 u 的第 (i, j) 点的权函数定义为

$$g_u(i, j) = 1 / \sqrt{1 + (u_x^2(i, j) + u_y^2(i, j)) / k^2} \quad (4)$$

其中, 参数 k 为某常值, u_x, u_y 分别表示图像 u 的灰度值沿 x, y 方向的偏导数。在对图像进行插值时, 为符合权函数的有关定义, 需对上述权函数进行归一化, 其得到的相应插值图像 \hat{v} 为

$$\begin{cases} \bar{v}(2i, 2j) = u(i, j) \\ \bar{v}(2i-1, 2j) = (g_u(i, j)u(i, j) + g_u(i-1, j)u(i-1, j)) / \\ \quad (g_u(i-1, j) + g_u(i, j)) \\ \bar{v}(2i, 2j-1) = (g_u(i, j)u(i, j) + g_u(i, j-1)u(i, j-1)) / \\ \quad (g_u(i, j) + g_u(i, j-1)) \\ \bar{v}(2i-1, 2j-1) = (g_u(i, j)u(i, j) + g_u(i, j-1)u(i, j-1) + \\ \quad g_u(i-1, j)u(i-1, j) + g_u(i-1, j-1)u(i-1, j-1)) / \\ \quad (g_u(i, j) + g_u(i, j-1) + g_u(i-1, j) + g_u(i-1, j-1)) \end{cases} \quad (5)$$

若以核函数的形式表示,则可写为

$$K_1(t_1, t_2) = \begin{cases} g_u(t_1, t_2), & |t_1| \leq \frac{1}{2}, |t_2| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

其中, $g_u(t_1, t_2)$ 按式(4)定义, u 为已知的低分辨率图像, 对式(6)进行归一化得到的核函数为

$$K_2(t_1, t_2) = \frac{K_1(t_1, t_2)}{\sum K_1(t_1, t_2)} \quad (7)$$

根据定理 1, 上述过程只能用于对非边缘点处进行插值, 在边缘点处需按以下步骤进行:

- (1) 对图像进行边缘检测;
- (2) 确定各点处边缘的方向;
- (3) 类似式(4)定义各点处的权函数矩阵 g_u , 其中式(4)中的梯度改为沿边缘方向的导数;
- (4) 根据定理 1 对边缘点处进行插值。

为进一步改进式(4)中有关第 (i, j) 点的导数的估计, 可采用由式(5)获得的图像 \bar{v} 来对式(4)所定义的函数进行更新。当然, 式(4)所取的函数形式并不一定是最优的, 事实上, 权函数矩阵 g_u (其中, $s = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$) 的定义也可取如下几种形式, 如

$$g_s = e^{-s}, \quad g_s = \frac{s}{1+s^2} \text{ 等} \quad (8)$$

由于人们通常以 $|\nabla u|$ 的大小来判断边缘, 并认为在 $|\nabla u|$ 大的地方为边缘。本着在边缘处权系数小的准则, 在选取 g_s 时一般应满足如下条件: $g_0 = 1$, g_s 为减函数, 且 $\lim_{s \rightarrow \infty} g_s = 0$ 。

3.3 参数选择

在式(4)中, 参数 k 的选取直接反映了方程对梯度的敏感性, 当 k 太大时, 由于式(4)所定义的权函数对梯度不敏感, 这样式(5)就相当于双线性插值, 其将不利于发挥该方法的优点, 因此, 如何合理地选择参数 k 是值得考虑的一个问题。

式(4)中权函数选择的主要目的是为了说明图

像中光滑点与非光滑点对插值的贡献不同。为了尽量将这种差异表现出来, 在构造参数 k 时, 应使得与不同梯度点对应的权系数之间的差异尽可能地拉大。于是可构造如下关于 k 的优化约束:

(1) 根据式(5)中的 5-2 式, k 应满足

$$\left(\frac{g_u(i, j) - g_u(i-1, j)}{g_u(i, j) + g_u(i-1, j)} \right)^2 \text{ 的值最大} \quad (9)$$

(2) 根据式(5)中的 5-3 式, k 应满足

$$\left(\frac{g_u(i, j) - g_u(i, j-1)}{g_u(i, j) + g_u(i, j-1)} \right)^2 \text{ 的值最大} \quad (10)$$

(3) 根据式(5)中的 5-4 式, k 应满足

$$\frac{\sum_{n=i-1}^i \sum_{m=j-1}^j g_u(i, j)^2}{\left(\sum_{n=i-1}^i \sum_{m=j-1}^j g_u(i, j) \right)^2} - \frac{1}{4} \text{ 的值最大} \quad (11)$$

不难看出, 当 k 越小时, 上面 3 式满足得越好, 但是不是就可以将 k 取为 0 呢, 实际情况并非如此, 这主要是基于以下几点理由:

(1) 由于上述过程中的求导是离散化的, 存在精度问题, 其所获得的梯度信息与实际梯度有一定的差距, 因此如果将这种梯度之间的差异过度拉大, 则有可能适得其反;

(2) 实际的图像数据究竟该用一种什么样的函数形式进行描述很难确定, 有可能这种函数曲线比较陡峭, 这时候光滑程度对权系数的影响相对较大, 也就是说, k 较小, 但也有可能这种函数曲线比较平坦, 这时候光滑程度对权系数的影响相对较小, 这时 k 就取得比较大。

为平衡以上两点中可能出现的矛盾, k 必须有一个折中的选择。通过大量的仿真计算可以发现, 当 k 取如下值时, 往往能获得较好的插值结果:

$$k = \text{mean}(\sqrt{u_x^2 + u_y^2}) \quad (12)$$

事实上, 从直观的角度考虑, 在梯度较大处(如边缘), 显然其对垂直于边缘线上的点的插值的影响应取得很小, 其对应的 k 的取值也就较小; 反之, 在梯度小处, 其对旁边的点的插值的影响应该取得较大, 对应的 k 的取值也就较大。根据这一思想, 即可根据梯度 $|\nabla u(i, j)|$ 的取值对 k 的取值作如下限制:

$$\begin{cases} k = k_1, & |\nabla u(i, j)| < r \\ k = k_2, & |\nabla u(i, j)| \geq r \end{cases} \quad (13)$$

其中, r 为阈值, 一般可取为边缘检测算子(如 Canny 算子)的阈值, 该阈值一般以图像中含 7% 的非边缘点为准, 实际上该比例可根据边缘检测的实际情况

而定。 k_2 是个接近于 0 的常数,可取 $k_2 = 0.01$, k_1 取值较大,可取 $k_1 = r$ 。

4 计算例子

为验证本文插值方法的效果,进行了以下几个实例的仿真计算。

(1) 例 1: 这是以一幅边缘简单、对比度较强的图像进行计算的例子,计算时,首先对图像进行 1/4 抽点来得到低分辨率图像,并对该图像采用最近邻法进行放大,原图像和放大后的图像分别见图 2(a)、图 2(b); 然后对低分辨率图像分别采用双线性插值函数以及本文提出的方法进行插值,其得到的插值后的图像分别见图 2(c)、图 2(d)。对 3 种插值方法得到的图像分别计算的峰值信噪比见表 1,其中参数 $k_1 = 10.9197$ 。从表 1 可以看出,本文的插值方法相对双线性插值方法而言,其插值后图像的峰值信噪比的提高是显著的,而且从 k_1 取不同值时插值图像的峰值信噪比来看,本文的取值方法也是合理的。

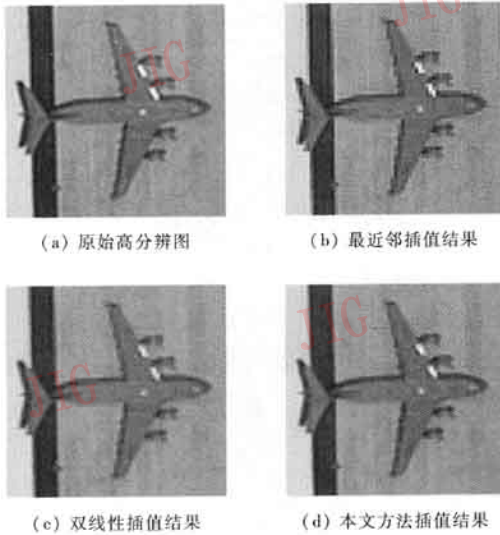


图 2 各插值方法得到的插值结果
Fig. 2 Interpolation results of different methods

表 1 各方法插值后的图像的峰值信噪比

Tab. 1 The PSNRs of interpolated images obtained by different methods

	最近邻法	双线性插值法	本文方法		
			$k_1 = 2$	$k_1 = 11$	$k_1 = 30$
PSNR (dB)	25.56	25.54	33.56	33.66	33.36

(2) 例 2: 这是以一幅边缘细节丰富、对比度较弱的 Lena 图像进行计算的例子,仿真过程同上,其得到的结果见图 3,各种插值方法插值的图像的峰值信噪比见表 2,其中参数 $k_1 = 18.4266$ 。表 2 的结果显示,对这种边缘细节丰富的图像而言其插值效果也优于双线性插值。



图 3 各插值方法得到的插值结果
Fig. 3 Interpolation results of different methods

表 2 各方法插值后的图像的峰值信噪比

Tab. 2 The PSNRs of interpolated images obtained by different methods

	最近邻法	双线性插值法	本文方法		
			$k_1 = 10$	$k_1 = 18.4$	$k_1 = 30$
PSNR (dB)	25.42	25.96	31.49	31.54	31.49

例 1 的计算结果表明,本文方法对于这种边缘信息比较简单,且对比度较强的图像而言,效果是非常明显的,事实上,它对文字图像的插值效果也很好。例 2 的计算结果也表明,即使是对边缘特征复杂的图像而言,其插值效果也优于已有的双线性等插值方法,而且从 k_1 取不同值时的插值后图像的峰值信噪比来看,本文的取值方法也是合理的。

参考文献 (References)

1 Castleman Kenneth R. Digital image processing. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 1998. Castleman Kenneth R. 数字图像处理 [M]. 北京:电子工业出版社,1998.]

- 2 Schanze T. Sinc Interpolation of discrete periodic signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(6): 1502 ~ 1503.
- 3 Unser Michael. Splines: A perfect fit for signal and image processing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(11): 22 ~ 38.
- 4 Xin Li, Michael T. Orchard. New edge-directed interpolation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(10): 1521 ~ 1527.
- 5 Candocia Frank M. A Unified superresolution approach for optical and synthetic aperture radar images[D]. Gainesville: Doctor Thesis of University of Florida, Miami FL, USA, 1998.
- 6 Blu Thierry, Unser Michael. Quantitative Fourier analysis of approximation techniques [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(10): 2783 ~ 2806.
- 7 Linda S. DeBrunner, Victor DeBrunner, Minghua Yao. Edge-retaining asymptotic projections onto convex sets for image interpolation[A]. In: 4th IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpretation [C]. Austin, Texas, USA, 2000: 78 ~ 82.
- 8 Liu Lixiang, Xie Jianying, Wang Mingzhong. Discrete-time reconstruction of non-uniformly sampled signal[J]. Chinese Journal of Electronics, 2002, 11(2): 196 ~ 199.